



Olympiade Francophone de Mathématiques

Sixième édition

22 mars 2025

ÉPREUVE JUNIOR

Les problèmes *ne* sont *pas* classés par ordre de difficulté

Problème 1. Un ensemble fini \mathcal{S} de réels strictement positifs distincts est dit *radieux* s'il vérifie la propriété suivante : si a et b sont deux éléments distincts de \mathcal{S} , alors $a^2 + b^2$ est également un élément de \mathcal{S} .

1. Existe-t-il un ensemble radieux de taille supérieure ou égale à 4 ?
2. Déterminer tous les ensembles radieux de taille 2 ou 3.

Problème 2. Soit $n \geq 2$ un entier. On considère une grille carrée de taille $2n \times 2n$ et découpée en $4n^2$ carrés unités. La grille est dite *équilibrée* si :

- Chaque case contient un nombre valant $-1, 0$ ou 1 .
- La valeur absolue de la somme des nombres de la grille ne dépasse pas $4n$.

Déterminer, en fonction de n , le plus petit entier $k \geq 1$ tel que toute grille équilibrée contient toujours un carré de taille $n \times n$ dont la valeur absolue de la somme des n^2 cases est inférieure ou égale à k .

Problème 3. Soit ABC un triangle, Ω son cercle circonscrit et O le centre de Ω . Soit P un point appartenant au segment $[BC]$. On note Q le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles AOB et APC .

Montrer que la droite (PQ) et la tangente à Ω au point A se coupent sur le cercle circonscrit au triangle AOB .

Problème 4. Charlotte écrit au tableau les entiers $1, \dots, 2025$. Charlotte dispose de deux opérations, l'opération *PGCD* et l'opération *PPCM*. L'opération *PGCD* consiste à choisir deux entiers a et b écrits au tableau, à les effacer et à écrire l'entier $\text{PGCD}(a, b)$. L'opération *PPCM* consiste à choisir deux entiers a et b écrits au tableau, à les effacer et à écrire l'entier $\text{PPCM}(a, b)$. Un entier N est dit *gagnant* s'il existe une suite d'opérations à l'issue desquelles le seul entier encore écrit au tableau est l'entier N .

Déterminer tous les entiers gagnants parmi $\{1, \dots, 2025\}$ et donner, pour chacun d'eux, le nombre minimum d'opérations *PGCD* que Charlotte doit utiliser.

Le nombre $\text{PGCD}(a, b)$ désigne le plus grand commun diviseur de a et b , tandis que le nombre $\text{PPCM}(a, b)$ désigne le plus petit commun multiple de a et b .

Durée de l'épreuve : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème est noté sur 7 points